Eksponentialfunksjoner

Fredrik Meyer

10. oktober 2010

1 Litt om regneregler

Når man regner med eksponentialfunksjoner er det viktig at man har kontroll på regnereglene [1]. Når man regner med potenser, må man kunne potensreglene. Det er kun 4 regler man trenger å huske: (boken nevner 7, men de 3 andre følger fra de 4)

$$\begin{array}{cc} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{pq} \\ (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p & a^{-1} = \frac{1}{a} \end{array}$$

Utfordring: Hvorfor følger regneglene på side 26 i læreboken fra de fire over? (dette er ikke helt lett!)

Øv deg med eksponenter (bruk kun reglene over!) (forkort)

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{b^5(ur)^2n^5}{ur} & , & \dfrac{(2^2)^5 2^{-10}}{(2^5)2^2} \\ (\text{drepmeg})^0 & , & \dfrac{3^5 3^7}{(3^2)^3 3^6} \end{array}$$

Noen eksempler

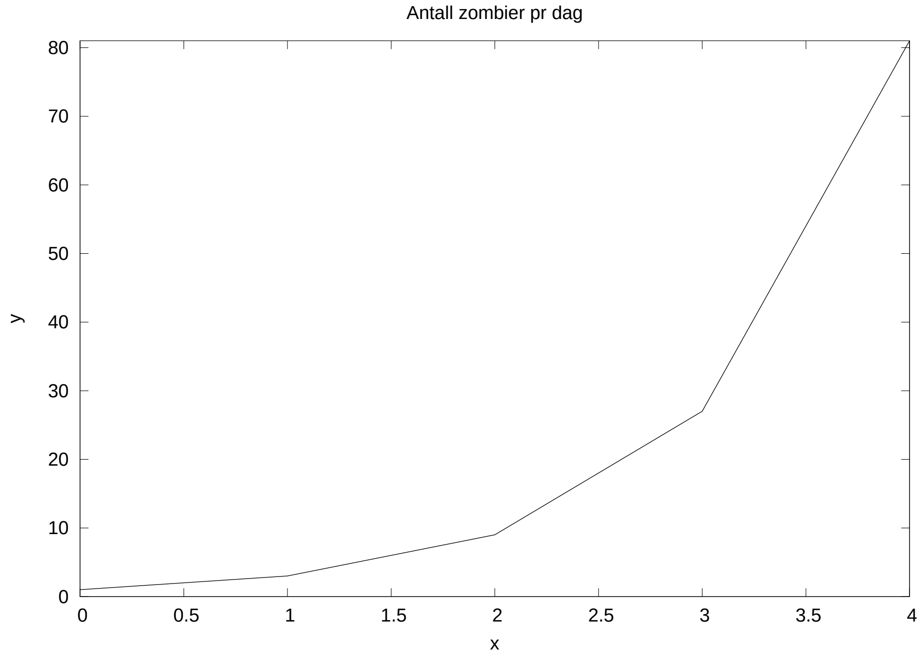
Eks 1: Zombie-invasjon

En dag blir du plutselig til en zombie. Du klarer å bite to personer hver dag (det vil si at hver dag lager du to nye zombier). Det klarer også alle som er smittede. Hvorfor er dette eksponentiell vekst? Hva er vekstfaktoren? Hva er prosentøkningen? Etter hvor mange dager er $6 \cdot 10^6$ (seks milliarder) mennesker smittet?

Her må vi tenke litt. Første dag er det bare du som blir smittet. Andre dag har du smittet to nye personer, så til sammen er det tre smittede. Tredje dag er det tre smittede pluss to nye fra hver av de tre fra dagen før, så det blir 9 smittede til sammen. Slik kan vi fortsette, og vi ser at antalle smittede øker veldig raskt.

La oss anta det er n zombier på dag k. Hvor mange zombier er det neste dag (dag $k+1$)?. La oss kalle antallet zombier på dag k for y_k. På dag $k+1$ blir

[1] Matematikk handler i stor grad om å kunne spillereglene. I sjakk har du kun lov å gjøre trekk som er beskrevet i reglene. I matematikk er tilfellet det samme.



Figur 1: Antall zombier pr dag i løpet av fire dager.

det da y_k zombier (disse var jo allerede smittede), pluss de nye smittede, som må være lik det dobbelte av y_k - fordi hver person smittet to nye). Derfor blir $y_{k+1} = y_k + 2y_k = 3y_k$. Fortsetter vi, ser vi at

$$y_{k+1} = 3y_k = 3(3y_{k-1}) = \cdots = 3^k y_0$$

Der y_0 er antallet zombier på dag 0. Så $y_0 = 1$. Med andre ord er antallet zombier på dag nummer $k+1$ gitt ved uttrykket

$$y = 1 \cdot 3^x$$

Men dette uttrykket er et uttrykk på formen sluttverdi = startverdi·vekstfaktor^n. Med andre ord har vi en vekstfaktor på 3. Det betyr at prosentøkningen p hver dag er gitt ved ligningen

$$1 + \frac{p}{100} = 3$$

Som er lett og løse, og vi ser at $p = 200$.

For å finne ut hvor mange dager det tar før $6 \cdot 10^9$ mennesker er smittet, prøver vi med noen tall. Vi gjetter på $x = 50$ dager:

$$y = 3^{50} = 717897987691852588770249$$

... som er alt for høyt! Hva med $x = 20$? Vi prøver:

$$y = 3^{20} = 3486784401$$

Vi nærmer oss! Dette er litt over 3 milliarder. La oss prøve med $x = 31$:

$$y = 3^{21} = 10460353203$$

Så etter 21 dager er 10 milliarder mennesker smittet!

Men til slutt. Dette er en ganske urealistisk modell for zombiespredning. Hvorfor?

Eks 2: Penger i banken

La oss ta et litt mer jordnært eksempel.

Lena ønsker seg bil, men tjener ikke nok penger til både spare til bil og andre livsnødvendigheter. Så hun bestemmer seg for å prostituere seg i en måned. Hun er ivrig, og klarer å tjene 10 000 kroner på en måned, hun setter dem i YaBank, og får $3,2$ prosent rente. Finn et uttrykk for beløpet etter x år. Hva er vekstfaktoren? Hva er den årlige prosentøkningen? Hvor mye har beløpet vokst til etter 5 år? Om en bruktbil koster 20 000 kroner, hvor lenge må pengene forrente seg før hun får råd til bilen?

Husk formelen

$$\text{sluttverdi} = \text{startverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^x \tag{1}$$

Hva er startverdien? Det er beløpet hun satte i banken det første året, nemlig 10 000 kroner. Hva er vekstfaktoren? Banken har $3,2$ prosent årlig rente, så vi må gjøre den prosentlige økningen om til vekstfaktor. Husk formelen

$$\text{vekstfaktor} = 1 + \frac{p}{100}$$

Vi setter inn og får vekstfaktor lik 1.032. For å finne sluttverdien, bruker vi formelen (1) og setter $x = 5$ år. Vi bruker (selvsagt!) kalkulator, og får at $y \approx 11705$.

For å finne ut hvor lenge pengene må stå og forrente seg, må vi prøve oss frem (det finnes andre metoder, men dem får ikke dere lære!). Hva med 10 år? Vi prøver:

$$y = 10000 \cdot 1.032^{10} \approx 13702$$

Ikke akkurat nok. Hva med 20 år?

$$y = 10000 \cdot 1.032^{20} \approx 18775$$

Nesten! Etter litt peiling, finner vi ut at beløpet krysser 20000-kronergrensen etter 23 år med

$$y = 10000 \cdot 1.032^{23} \approx 20636$$

Med andre ord er en måned prostitusjon pluss YaBank ikke en spesielt rask måte å få råd til bil på!

Eks 3: Pandastatsminister

En miljøgruppe (pick one!) har overbevist Norges befolkning om at pandaer er fryktelig smarte dyr, og nå er Norges nyevalgte statsminister en panda. Dessverre har ikke pandaen peiling på økonomi, og størsteparten av statsutgiftene går til å kjøpe bambus.

SSB har regnet ut at statsinntektene vil synke med 50% hvert år fra nå (vi kaller nå år null). Anta at statsinntekten nå er på ti milliarder året. Hvor lang tid tar det før statsinntekten er på ti kroner året?

Husk igjen formelen

$$\text{sluttverdi} = \text{startverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^x$$

Startverdien er på ti milliarder. Hva er forresten det på standardform? Hvor mange nuller er det i én milliard? 9. Da er det ti nuller i ti milliarder, så to milliarder $= 1 \cdot 10^{10}$. Hvordan finner vi vekstfaktoren? Igjen, husk formelen over. Men siden det er prosentvis nedgang, må vi sette et minustegn foran p i formelen:

$$\text{vekstfaktor} = 1 - \frac{p}{100} = 1 - 50100 = 0.5$$

Så vekstfaktoren er på 0.5. Dermed får vi at statsinntektene etter x år er gitt ved

$$y = 10^{10} \cdot 0.5^x$$

La oss gjette på 10 år. Da får vi at

$$y = 10^{10} \cdot 0.5^{10} = 9765625$$

Ikke riktig 10 år! Vi peiler oss fram, og finner ut at

$$y = 10^{10} \cdot 0.5^{30} \approx 9.313225$$

Så etter 30 år med pandastatsminister, vil landet ha en statsinntekt på under 10 kroner årlig.