Oblig i kommutativ algebra

Fredrik Meyer

Oppgave (1)**.** *Anta $n \in \mathbb{Z}$ er kvadratfri. Vis at helavslutningen til $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ er $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ dersom $n \not\equiv 1 \pmod 4$ og $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}]$ dersom $n \equiv 1 \pmod 4$.*

Bevis. Vi er interessert i hvordan løsningene til moniske polynomer med koeffisienter i $\mathbb{Z}$ restriktert til $\mathbb{Q}[n]$ ser ut. Våre moniske polynomer må være andregradspolynomer siden vi ser på en utvidelse av grad 2. Kall helavslutningen til $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ for C, og anta $x \in C$. Da er x løsning til et polynom på formen

$$x^2 + bx + c = 0$$

med $b, c \in \mathbb{Z}$. Den har løsning

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

For at denne skal befinne seg i $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, må $b^2 - 4c = k^2 n$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Vi må dele inn i tilfeller.

1. $n \equiv 1 \pmod 4$ og $k^2 \equiv 1 \pmod 4$: I så fall blir $b^2 \equiv 1 \pmod 4$, så $2 \nmid b$, så $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}]$, og det er greit å se at $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}]$. Om $k^2 \equiv 1 \pmod 4$, ser vi at $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, men dette er ikke så farlig, siden $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}]$.

2. $n \not\equiv 1 \pmod 4$ og $k^2 \equiv 1 \pmod 4$: Vi har $b^2 = k^2 n \pmod 4$, og siden b^2 er et kvadrat, må $n \equiv 0 \pmod 4$. Men det motsier at n er kvadratfri.

3. $n \not\equiv 1 \pmod 4$ og $k^2 \equiv 0 \pmod 4$: Vi får at b er delelig med 2 og at $b^2 - 4c$ er delelig med 4, så $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

$\square$

Oppgave (2)**.** *La A være en Noethersk ring, $\mathfrak{p}$ et primideal i A og M en endelig-generert A-modul. Vi sier at $p \in Ass(M)$ om det finnes en $m \in M$ slik at $Ann(m) = \mathfrak{p}$. ($\mathfrak{p}$ er assosiert til M)*
a) Vis at $Ass(M) = \varnothing$ hvis og bare hvis $M = 0$.
b) Vis at for et primideal $\mathfrak{p}$, så er $Ass(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.
c) La $p \in Ass(M)$. Da eksisterer det en undermodul av M isomorf med $A/\mathfrak{p}$.
d) La

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

være en kort eksakt sekvens av A-moduler. Da har vi

$$Ass(M) \subseteq Ass(M') \cup Ass(M'')$$

Bevis. a) Om $M = 0$ er åpenbart $\mathrm{Ass}(M) = \varnothing$. Så anta $M \neq 0$, og la $\mathcal{A} = \{\mathrm{Ann}(x) | x \in M, x \neq 0\}$. Da er $\mathcal{A}$ ikke-tom, fordi $(0) \in \mathcal{A}$. Siden A er Noethersk, har $\mathcal{A}$ et maksimalt element $\mathfrak{p}$. La $xy \in \mathfrak{p}$, $y \notin \mathfrak{p}$. Da er $xym = 0$ for en $m \in M$. Da er $x \in \mathrm{Ann}(ym)$, og $\mathrm{Ann}(ym) \supseteq \mathrm{Ann}(m)$. Men $\mathrm{Ann}(m)$ var maksimal, så $\mathrm{Ann}(ym) = \mathrm{Ann}(m)$, så $x \in \mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$, så $\mathfrak{p}$ er prim.

b) Vi betrakter $A/\mathfrak{p}$ som en A-modul. La $a \in A$ og $x \in A/\mathfrak{p}$ ($x \neq 0$) og anta $xy = 0$. Siden $A/\mathfrak{p}$ er et integritetsdomene, må $a = 0$ i $A/\mathfrak{p}$, det vil si $a \in \mathfrak{p}$.

c) Anta $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Da finnes $x \in M$ med $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$. Vi definerer en avbildning $\phi : A \to M$ ved $a \mapsto ax$. Den har kjerne $\mathfrak{p}$, så vi har en eksakt sekvens:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow A \longrightarrow \phi(M) \longrightarrow 0$$

og $\phi(M)$ er en undermodul av M med $\phi(M) \cong A/\mathfrak{p}$.

d) Anta $p \in \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Da er $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$ for en $m \in M$. Anta først at $\mathrm{Ker}(\psi) \cap Am = (0)$. Da er $p\psi(m) = \psi(pm) = 0$, så $p \in \mathrm{Ann}(\psi(m))$, så $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}(\psi(m))$. Anta så $y \in \mathrm{Ann}(\psi(m))$. Da er $\psi(ym) = 0 \in \mathrm{Ker}(\psi)$, så siden $\mathrm{Ker}(\psi) \cap Am = (0)$, må $ym = 0$, så $y \in \mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$. Dermed er $\mathrm{Ann}(\psi(m)) = \mathfrak{p}$, så $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M'')$.

Anta nå at $\mathrm{Ker}(\psi) \cap Am \neq (0)$, nemlig at $m \in Im(\phi)$. Siden ϕ er injektiv, finnes en unik m' med $\phi(m') = m$. Det følger at $pm' = 0$, så $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{Ann}(m')$. Motsatt, anta $a \in \mathrm{Ann}(m')$. Da er $am' = 0$, så $\phi(am') = am$, så $a \in \mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$. Med andre ord er $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M')$. $\square$

Oppgave (3)**.** *La A være en ring og M en A-modul. Definer støtten til M: Supp$(M) = \{\mathfrak{p} \subset A | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$. La også $V(I) = \{\mathfrak{p} \subset A | I \subseteq \mathfrak{p}\}$. $\mathfrak{p}$ er alltid et primideal.*
a) Vis at Supp$(A/I) = V(I)$.
b) La M være en endeliggenerert A-modul. Vis at Supp$(M) = V(Ann(M))$.
c) La

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

være en kort eksakt sekvens av A-moduler. Da er

$$Supp(M) = Supp(M') \cup Supp(M'')$$

Bevis. a) Anta $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(A/I)$. Da finnes en $a \notin I$ slik at $as \notin I$ for alle $s \in A - \mathfrak{p}$, så $I \subseteq \mathfrak{p}$ (for ellers hadde vi kunnet gange oss inn i I). Motsatt, anta at $\mathfrak{p} \in V(I)$. Da er $\mathfrak{p} \supseteq I$. Velger vi da en $x \notin \mathfrak{p}$, ser vi at $xy \notin \mathfrak{p}$ for alle $y \in A - \mathfrak{p}$, siden $\mathfrak{p}$ er prim. Da er heller ikke $xy \in I$, så $(A/I)_{\mathfrak{p}} \neq 0$, og dermed $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(A/I)$. Så $\mathrm{Supp}(A/I) = V(I)$.

b) Anta $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, det vil si at det finnes en $m \in M$ slik at $ms \neq 0$ for alle $s \in A - \mathfrak{p}$. La $y \in \mathrm{Ann}(M)$. Da er $ym = 0$, så $y \notin A - \mathfrak{p}$, så $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}$.

Motsatt, anta at $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}(M)$ og at $M_{\mathfrak{p}} = 0$. La $M = (x_1, \cdots, x_n)$. Spesielt finnes det for hver x_i en s_i slik at $x_i s_i = 0$. La

$$s = \prod_i^n s_i$$

Da er $s \in \mathrm{Ann}(M)$, som motsier at $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}(M)$. Så $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Altså $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$.

c) Lokalisering er en eksakt operasjon, så sekvensen

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

er eksakt. Om $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M)$, er $M_{\mathfrak{p}} = 0$, og da må $M'_{\mathfrak{p}}$ og $M''_{\mathfrak{p}}$ være null siden sekvensen er eksakt. Motsatt, om $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$, er $M'_{\mathfrak{p}} = 0$ og $M''_{\mathfrak{p}} = 0$. Dermed tvinges $M_{\mathfrak{p}}$ til å være lik null den også.

□

Oppgave (4)**.** *La M være en endelig-generert A-modul over en Noethersk ring A, og la $\mathfrak{p}$ være et primideal i A. Vis at*

a) $\mathit{Ass}(M) \subseteq \mathit{Supp}(M)$.
b) $\mathfrak{p} \in \mathit{Supp}(M)$ *hvis og bare hvis det finnes et primideal* $\mathfrak{p}' \in \mathit{Ass}(M)$ *med* $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$.
c) de minimale elementene i $\mathit{Supp}(M)$ *er de samme som de minimale elementene i* $\mathit{Ass}(M)$.

Bevis. a) La $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Da er $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$ for en $m \in M$. Da er $sm \neq 0$ for alle $s \in A - \mathfrak{p}$, så $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Så $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$.

b) $\Leftarrow$: Anta det eksisterer en $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(M)$ med $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Fra a) er $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Supp}(M)$, slik at $M'_\mathfrak{p} \neq 0$. Da finnes en $m \in M$ med $ms \neq 0$ for alle $s \in A - \mathfrak{p}'$. Siden $A - \mathfrak{p}' \supseteq A - \mathfrak{p}$, må også $M_\mathfrak{p} \neq 0$, så $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$.

$\Rightarrow$: Om $M_\mathfrak{p} \neq 0$, har vi fra 2a) at $\mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p}) \neq \varnothing$. Da finnes et primideal $\mathfrak{p}'' \in \mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p})$. Da finnes $m/1 \in M_\mathfrak{p}$ slik at $\mathrm{Ann}(m/1) = \mathfrak{p}''$. Da finnes fra Prop 3.13 i Atiyah et unikt primideal $\mathfrak{p}'$ i A med $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ som ved brøkavbildningen $a \mapsto a/1$ sendes på $\mathfrak{p}''$. Det er greit å se at $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}'$. (egentlig ikke, men jeg står litt fast!)

c) Anta $\mathfrak{p}$ er minimal i $\mathrm{Ass}(M)$ og anta det finnes $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Supp}(M)$ med $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Siden $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Supp}(M)$, finnes fra b) en $\mathfrak{p}'' \in \mathrm{Ass}(M)$ med $\mathfrak{p}'' \subset \mathfrak{p}'$. Men siden $\mathfrak{p}$ var minimal i $\mathrm{Ass}(M)$ må (vi har $\mathfrak{p}'' \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$), $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, så $\mathfrak{p}$ er minimal i $\mathrm{Supp}(M)$.

Anta $\mathfrak{p}$ er minimal i $\mathrm{Supp}(M)$. Siden $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, følger det fra b) og minimalitet at $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Siden $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$, må $\mathfrak{p}$ være minimal i $\mathrm{Ass}(M)$. $\square$