# Oppgaver i kommutativ algebra

Fredrik Meyer

## 1 Brøkringer, primærdekomposisjon og helavhengighet

**Oppgave** (3.1). *La $S$ være en multiplikativ lukket delmengde (med $1 \in S$) av ringen $A$, og la $M$ være en endeliggenerert $A$-modul. Da er $S^{-1}M = 0$ hvis og bare hvis det eksisterer en $s \in S$ slik at $sM = 0$.*

*Bevis.* $\Rightarrow$: Anta at $S^{-1}M = 0$. La $f : M \to S^{-1}M$ være definert ved $f(m) = \frac{m}{1}$. Da er $f(m) = 0$ for alle $m \in M$. Det vil si at for hver $m$ eksisterer en $s_m$ slik at $ms_m = 0$. La $m_1, \cdots, m_n$ generere $M$. Og la

$$s = \prod_{i=1}^{n} s_{m_i}$$

Da er $ms = 0$ for alle $m \in M$ (fordi alle $m$ er en lineærkombinasjon av $m_i$), og dermed $sM = 0$.

$\Leftarrow$: Anta det eksisterer en $s \in S$ slik at $sM = 0$. Da er $sm = 0$ for alle $m \in M$. La $f$ som over. Alle elementer i $S^{-1}M$ er på formen $f(m)f(s)^{-1}$ med $s \in S$ og $m \in M$. Men

$$f(m)f(s)^{-1} = f(m)f(s)f(s)^{-1}f(s)^{-1} = f(ms)f(s)^{-2} = 0.$$

Så $S^{-1}M = 0$. $\square$

**Oppgave** (3.2). *La $\mathfrak{a}$ være et ideal i ringen $A$ og la $S = 1 + \mathfrak{a}$. Da er $S^{-1}\mathfrak{a}$ inneholdt i Jacobson-radikalet til $S^{-1}A$. Dette vil gi oss et sirkulært bevis for Prop 2.5 i Atiyah. ($M$ endeliggenerert $A$-modul, $\mathfrak{a}M = M \Rightarrow \exists x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ slik at $xM = 0$).*

*Bevis.* La $f : A \to S^{-1}A$ være brøkavbildningen $a \mapsto a/1$. Alle elementene i $S^{-1}A$ er på formen $f(a)f(s)^{-1}$ med $a \in A$ og $s \in S$. At $S^{-1}\mathfrak{a}$ er inneholdt i Jacobson-radikalet til $S^{-1}A$ er ekvivalent med at om $f(a)f(s)^{-1} \in S^{-1}\mathfrak{a}$ ($a \in \mathfrak{a}, s \in S$), så er $1 + f(a)f(s)^{-1}f(a')f(s')^{-1}$ for alle $a' \in A$ og $s' \in S$. Vi har at

$$1 + f(a)f(s)^{-1}f(a')f(s')^{-1} = f(1) + f(ab)f(ss')^{-1}$$

Ganger vi denne med $f(ss')$, får vi

$$f(ss') + f(ab) = f(ab + ss').$$

Men $ab + ss'$ er med i $S$, så $f(ab + ss')$ er enhet i $S^{-1}A$. Dermed må også $1+f(a)f(s)^{-1}f(a')f(s')^{-1}$ være det. Vi konkluderer med at $1+f(a)f(s)^{-1} \in S^{-1}\mathfrak{a}$ er inneholdt i Jacobson-radikalet til $S^{-1}A$.

Nå gir vi et bevis for (2.5) som tilsynelatende ikke avhenger av determinanter. (beviset er egentlig sirkulært fordi Nakayamas lemma følger fra (2.5), men vi later som om vi ikke vet dette!).

Så anta $\mathfrak{a}M = M$. Da er $S^{-1}M = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}M)$. Siden $S^{-1}\mathfrak{a}$ er inneholdt i Jacobson-radikalet, følger det fra Nakayama at $S^{-1}M = 0$. Fra forrige oppgave følger det at det da finnes en $s \in S$ slik at $sM = 0$. Men $s = 1 + a$ for en $a \in \mathfrak{a}$, og $s \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$. □

**Oppgave** (3.3)**.** *La $A$ være en ring, og $S, T$ to multiplikativt lukkede delmengder av $A$, og la $U$ være bildet av $T$ i $S^{-1}A$. Vis at $(ST)^{-1}A \simeq U^{-1}(S^{-1}A)$.*

*Bevis.* La $g$ være brøkavbildningen fra $A$ til $(ST)^{-1}A$ gitt ved $a \mapsto a/1$. La tilsvarende $f$ være brøkavbildningen fra $A$ til $S^{-1}A$, og $h$ brøkavbildningen fra $S^{-1}A$ til $U^{-1}(S^{-1}A)$. La $d = h \circ f$. Vi bruker korollar 3.2 i Atiah.

Anta nå $x = v \in ST$. Da er $v = st$ for $s \in S$ og $t \in T$. Siden $S \subseteq ST$ (fordi $1 \in ST$), er $f(x)$ enhet i $S^{-1}A$. Siden $T \subseteq ST$, er $f(x) \in U = f(T)$, så $h \circ f(x) = d(x)$ er enhet i $U^{-1}(S^{-1}A)$.

Anta nå $d(x) = 0$. Ønsker å vise at $xv = 0$ for en $v \in ST$. Siden $d = h \circ f$, er da $f(x)u = 0$ for en $u \in U$. Men $u = f(t)$ for en $t \in T$. Så $f(xt) = 0$. Men da er $xts = 0$ for en $s \in S$. Men $ts \in ST$.

Ønsker å vise at hvert element i $U^{-1}(S^{-1}A)$ er på formen $d(a)d(v)^{-1}$ for $v \in ST$ og $a \in A$. Alle elementer i $U^{-1}(S^{-1}A)$ er på formen $h(k)h(u)^{-1}$ med $u \in U$ og $k \in S^{-1}A$. Men $u$ er på formen $f(t)$ for en $t \in T$, og $k$ er på formen $f(a)f(s)^{-1}$. Dermed er

$$h(k)h(u)^{-1} = h(f(a)f(s)^{-1})h(f(t))^{-1} = h(f(a))h(st)^{-1}$$

Men siden $d = h \circ f$, er nettopp alle elementer i $U^{-1}(S^{-1}A)$ på formen $d(a)d(v)^{-1}$ for $v \in ST$.

Det følger nå direkte fra korollar 3.2 i Atiyah at $U^{-1}(S^{-1}A) \simeq (ST)^{-1}A$. □

**Oppgave** (3.5)**.** *La $A$ være en ring. Anta at for hvert primideal $\mathfrak{p}$ så har $A_{\mathfrak{p}}$ ingen nilpotente elementer ulik null. Men om hver $A_{\mathfrak{p}}$ er integritetsdomene, er ikke nødvendigvis $A$ det. Moteksempel gis.*

*Bevis.* Det følger umiddelbart at for hvert maksideal $m$, så har $A_m$ ingen nilpotente elementer. Så anta $a \in A$ er nilpotent. Det vil si, $a^n = 0$ for en eller annen $n$. Men da er $a^n/1 = (a/1)^n = 0 \in A_m$. Men siden $A_m$ ikke har noen nilpotente elementer, må $a/1 = 0$, det vil si det eksisterer $v \in A - m$ slik at $av = 0$. Men hver ikke-enhet i $A$ er inneholdt i et maksideal. Siden betingelsen gjelder for alle maksidealer, kan ikke $v$ være med i noe maksideal, så $v$ er enhet. Dermed må $a = 0$.

La $A = \mathbb{Z}_6$, og la $\mathfrak{p}_1 = (2)$ og $\mathfrak{p}_2 = (3)$. Da er $A_{\mathfrak{p}_1} \simeq \mathbb{Z}/(2)$ og $A_{\mathfrak{p}_2} \simeq \mathbb{Z}/(3)$ som begge er integritetsdomener. $\square$

**Oppgave** (4.2)**.** *Om $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$, så har $\mathfrak{a}$ ingen embeddede idealer.*

*Bevis.* La $\{\mathfrak{p}_i\}$ være de assossierte primidealene til $\mathfrak{a}$, og la

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$$

være en minimal primærdekomposisjon av $\mathfrak{a}$. Da er $r(\mathfrak{a}) = \cap^n r(\mathfrak{q}_i) = \cap^n \mathfrak{p}_i$. Om $\mathfrak{p}_j$ ikke er minimal, det vil si at $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ for en eller annen $i$, vil

$$\bigcap_{i \neq j}^{n} \mathfrak{p}_i = \bigcap^{n} \mathfrak{p}_i$$

som motsier at komposisjonen var minimal. $\square$

**Oppgave** (4.4)**.** *I polynomringen $\mathbb{Z}[t]$ er idealet $m = (2, t)$ maksimalt og idealet $\mathfrak{q} = (4, t)$ er $m$-primært, men er ikke en eksponent av $m$.*

*Bevis.* Det er lett å se at $\mathbb{Z}[t]/(2, t) \simeq \mathbb{Z}/(2)$, som er en kropp. $m$ er derfor maksimal. Vi viser at $r(\mathfrak{q}) = m$. La $f \in m$. Da er $f$ på formen

$$f = 2a_0 + a_1 t + a_2 t + \cdots + a_n t^n$$

Da er $f^2$ på formen

$$f^2 = 4a^2 + 4a(a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) + (a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n)^2,$$

så $f^2 \in \mathfrak{q}$. Dermed har vi $m \subset r(\mathfrak{q})$, og siden $m$ er maksimal, betyr dette at $m = r(\mathfrak{q})$.

Men $m^2 = (t^2, 4)$, og vi har $m \subset \mathfrak{q} \subset m^2$ (strenge inklusjoner). Så $\mathfrak{q}$ kan ikke være en eksponent av $m$. $\square$

**Oppgave** (5.2). *La $A$ være en underring av $B$ slik at $B$ er hel over $A$, og la $f : A \to \Omega$ være en homomorfi fra $A$ til en algebraisk lukket kropp $\Omega$. Da kan $f$ utvides til en homomorfi fra $B$ til $\Omega$.*

*Bevis.* La $f(A)$ betegne bildet av $A$ i $\Omega$. Da er $f(A) \simeq A/\ker(f)$. $\ker f$ er et primideal: for la $xy \in \ker f$. Da er $f(xy) = f(x)f(y) = 0$. Men $\Omega$ er en kropp (og spesielt et integritetsdomene), så $f(x) = 0$ eller $f(y) = 0$, altså $x \in \ker f$ eller $y \in \ker f$. Fra Prop 5.10 i Atiyah finnes et primideal $\mathfrak{q} \in B$ slik at $A \cap \mathfrak{q} = \ker f$. Vi har følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/\ker f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{q} \arrow[r] & B \arrow[r] & B/\mathfrak{q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ved Prop 5.6i) i Atiyah er $B/\mathfrak{q}$ hel over $A/\ker f$. Siden $\Omega$ er algebraisk lukket, må det finnes en underring $C \subseteq \Omega$ slik at $C$ er hel over $f(A)$. Vi må ha $B/\mathfrak{q} \simeq C$ siden $A/\ker f \simeq f(A)$. Dermed har vi en injeksjon $B/\mathfrak{q} \to \Omega$, så $B \to B/\mathfrak{q} \to \Omega$ er homomorfien vi lette etter.

□