Oppgaver i kommutativ algebra

Fredrik Meyer

1 Moduler

Oppgave (1)**.** *Vis at om m, n er koprimære, så er $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.*

Proof. Siden m og n er koprimære, finnes det $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at $an + bm = 1$. La $x \otimes y \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Da er

$$x \otimes y = (1x \otimes y) = (an + bm)x \otimes y = (anx + bmx) \otimes y$$

$$(anx) \otimes y = x \otimes (any) = x \otimes 0 = 0.$$

Så $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$. □

Oppgave (2)**.** *La A være en ring, $\mathfrak{a}$ et ideal, og M en A-modul. Vis at $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \simeq M/\mathfrak{a}M$.*

Proof. Først viser vi at $\mathfrak{a}M \simeq \mathfrak{a} \otimes M$. Men dette er enkelt. Vi definerer en avbildning:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a} \times M & \longrightarrow & \mathfrak{a}M \\ (a, m) & \longmapsto & am, a \in \mathfrak{a}, m \in M \end{array}$$

Denne avbildningen er bilineær og induserer en homomorfi. Det er klart at avbildningen $a \otimes m \mapsto am \mapsto a \otimes m$ er identiteten, så vi har en isomorfi. Legg nå merke til at

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

er eksakt. Fra Prop 2.18 i Atiyah følger det da at

$$\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow A \otimes_A M \longrightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_A M \longrightarrow 0$$

også er eksakt. Nå, legg merke til at

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}M \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/\mathfrak{a}M \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

er eksakt (ι er inklusjonsfunksjonen, og π er projeksjonen). Siden $\mathfrak{a} \otimes M \simeq \mathfrak{a}M$ og $A \otimes M \simeq M$ (Prop 2.14), har vi følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \otimes_A M \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "f'", "\simeq"'] & A \otimes_A M \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f", "\simeq"'] & A/\mathfrak{a} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "?"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}M \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, "\pi"] & M/\mathfrak{a}M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi ønsker å definere en homomorfi $\psi : A/\mathfrak{a} \otimes M \to M/\mathfrak{a}M$. La $x \in A/\mathfrak{a} \otimes M$. Siden π' er surjektiv, finnes $y \in A \otimes M$ slik at $\pi'(y) = x$. Så la $\psi(x) = \pi \circ f(y)$. Vi må vise at ψ er veldefinert. Anta også at $\pi'(y') = x$. Da er $y - y' \in \mathrm{Ker}(\pi')$, så $y - y' \in \mathrm{im}(\iota')$. Da eksisterer en k slik at $\iota'(k) = y - y'$. Men $\pi \circ \iota \circ f'(k) = 0 = \pi \circ f \circ \iota'(k) = \pi \circ f(y - y') = \psi(y - y')$, så $\psi(y) = \psi(y')$, og ψ er veldefinert. Ved slangelemmaet finnes en eksakt sekvens

$$\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f') \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\psi) \longrightarrow 0$$

Men siden f bijektiv, må $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Coker}(\psi) = 0$, og ψ er en isomorfi. $\square$

Oppgave (3)**.** *La A være en lokal ring, og la M, N være endeliggenererte A-moduler. Da har vi at $M \otimes_A N = 0 \Rightarrow M = 0$ eller $N = 0$.*

Proof. Siden A er en lokal ring, er $k = A/m$ en kropp, hvor m er maksimalidealet. La M_k betegne $k \otimes_A M$. Anta at $M \otimes_A N = 0$. Da er trivielt også $M \otimes_A N \otimes k \otimes k \simeq M_k \otimes_A N_k = 0$. Om $M_k \otimes_A N_k = 0$ er åpenbart også $M_k \otimes_k N_k = 0$ siden k bare består av ekvivalensklasser av A. Siden M, N er endeliggenererte, er også M_k, N_k det. La x_i, y_j ($i, j \in I$, for en endelig indeksmengde I) generere M_k, N_k, henholdsvis. Da er $M_k \otimes N_k$ generert av vektorene $x_i \otimes y_j$. Om M_k har dimensjon m og N_k har dimensjon n, har $M_k \otimes N_k$ derfor dimensjon mn. Men vi må ha $mn = 0$, så vi har at $m = 0$ eller $n = 0$. Det følger at $M_k = 0$ eller $N_k = 0$.

Uten tap av generalitet, anta $M_k = 0$. Fra forrige oppgave er $M_k \simeq M/mM$. Siden $M_k = 0$ er $mM = M$. Siden A er lokal, er m lik Jacobsonradikalet til A. Da følger det fra Nakayamas lemma at $M = 0$. $\square$

Oppgave (4)**.** *La M_i ($i \in I$) være en familie av A-moduler, og la*

$$M = \oplus_{i \in I} M_i.$$

Da er M flat $\Leftrightarrow$ hver M_i er flat.

Proof. La $M = \oplus_{i\in I} M_i$. Da har vi naturlige projeksjoner $\pi_i : M \to M_i$ og injeksjoner $\iota_i : M_i \to M$. La $f : N' \to N$ være en injektiv funksjon. Det er lett å se at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} M \otimes N' \arrow[r, "1_M \otimes f"] \arrow[d, shift left, "\pi_i \otimes 1"] & M \otimes N \arrow[d, shift left, "\pi_i' \otimes 1"] \\ M_i \otimes N' \arrow[r, "1_{M_i} \otimes f"] \arrow[u, shift left, "\iota_i \otimes 1"] & M_i \otimes N \arrow[u, shift left, "\iota_i' \otimes 1"] \end{tikzcd}$$

I ETTERTID: Ser at dette bare blir feil. Jeg antar jo at N også er eksakt! Derfor har vi jo ikke nødvendigvis injeksjonene over! Så jeg er målløs! □

Oppgave (6)**.** *La M være en A-modul, og la $M[x]$ være mengden av x-polynomer med koeffisienter i M. Definerer vi produktet av en $f \in A[x]$ med en $g \in M[x]$ på den åpenbare måten, er $M[x]$ en $A[x]$-modul. I tillegg er $M[x] \simeq A[x] \otimes_A M$.*

Proof. At $M[x]$ er en $A[x]$-modul er det samme som at $f \in A[x]$ virker lineært på elementer i $M[x]$. Men dette er åpenbart. Lar vi for eksempel $f, f' \in A[x]$ og $g \in M[x]$, er det trivielt at $(f + f')g = fg + f'g$.

Utfordringen ligger i å vise at $M[x] \simeq A[x] \otimes_A M$. Vi definerer en avbildning $\psi' : A[x] \times M \to M[x]$. La $(f, m) \in A[x] \times M$, og la $\psi'(f, m) = mf$. Da er ψ' bilineær, og den induserer derfor en unik avbildning $\psi : A[x] \otimes_A M \to M[x]$ slik at $\psi(f \otimes m) = mf$. Vi definerer også en avbildning $\phi : M[x] \to A[x] \otimes_A M$ ved

$$mx^j \mapsto x^j \otimes m$$

Det er lett å se at denne er en homomorfi. La $\sum_j m_j x^j \in M[x]$. Da er

$$\psi \circ \phi(\sum_j m_j x^j) = \psi \circ (\sum_j \phi(m_j x^j)) = \psi \circ (\sum_j (x^j \otimes m_j)) = \sum_j m_j x^j$$

så $\psi \circ \phi$ er identitetsavbildningen. På den andre siden, la $f_i = \sum_j a_{ji} x^j \in$

$A[x]$. Et element i $A[x] \otimes M$ har formen $\sum_i (f_i \otimes m_i)$. La oss se på $\phi \circ \psi$:

$$\begin{aligned}
\phi \circ \psi(\sum_i (f_i \otimes m_i)) &= \phi \circ \psi(\sum_i ((\sum_j a_{ji} x^j) \otimes m_i)) \\
&= \phi \circ \psi(\sum_i (\sum_j (a_{ji} x^j \otimes m_i))) \\
&= \phi \circ \psi(\sum_i (\sum_j (x^j \otimes a_{ji} m_i))) \\
&= \phi \circ (\sum_i \sum_j (\psi(x^j \otimes a_{ji} m_i))) \\
&= \phi(\sum_i \sum_j a_{ji} m_i x^j) \\
&= \sum_i \sum_j \phi(a_{ji} m_i x^j) \\
&= \sum_i \sum_j (x^j \otimes a_{ji} m_i) \\
&= \sum_i f_i \otimes m_i
\end{aligned}$$

Så $\phi \circ \psi$ er identitetsavbildningen, og de er begge derfor isomorfier ($\phi^{-1} = \psi$). □

Oppgave (8). *i) Hvis M og N er flate A-moduler, så er også $M \otimes_A N$ det. ii) Hvis B er en flat A-algebra og N en flat $B-modul$, så er N flat som A-modul.*

Proof. i)
La E være en kort eksakt sekvens:

$$E: \qquad 0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

Siden M er flat, er $E \otimes M$ eksakt fra Prop 2.19. Siden N er flat, er $(E \otimes M) \otimes N$ eksakt. Men fra Prop 2.14 er $(E \otimes M) \otimes N \simeq E \otimes (M \otimes N)$, så $E \otimes (M \otimes N)$ er eksakt. Men fra Prop 2.19 er dette ekvivalent med at $M \otimes N$ er flat.
ii)
Igjen, la E være en eksakt sekvens. Siden B er flat som A-modul, er $E \otimes_A B$ eksakt. Denne modulen er naturlig en B-modul, så det følger at $(E \otimes_A B) \otimes_B N$ er eksakt siden N er flat som B-modul. Fra Exercise 2.15 og Prop 2.14 i Atiyah er

$$(E \otimes_A B) \otimes_B N \simeq E \otimes_A (B \otimes_B N) \simeq E \otimes_A N$$

eksakt. Dette er fra Prop 2.19 ekvivalent med at N er flat som A-modul. $\square$

Oppgave (9)**.** *La*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

være en eksakt sekvens av A-moduler. Hvis M' og M'' er endeliggenererte, så er også M det.

Proof. Fra Prop 2.3 vet vi at M' og M'' er isomorfe med kvotienter av A^n for noen n. Det vil si at vi har surjektive avbildninger $\phi : A^n \to M'$ og $\theta : A^m \to M''$. Vi ønsker å definere en surjektiv avbildning $\mu : A^{m+n} \to M$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi"] & A^{n+m} \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "?", "\mu"'] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "?"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\mu) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Fra slangelemmaet vet vi at det finnes en eksakt sekvens fra

$$\mathrm{Coker}(\phi) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\mu) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\theta)$$

Siden ϕ, θ er surjektive, vil det umiddelbart følge at μ er surjektiv om vi klarer å definere den. Siden en avbildning fra en fri modul er bestemt av virkningen på basiselementene, kan vi definere μ for hver $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ i A^{n+m} (vi kaller det i'te basiselementet for e_i). Om $1 \leq i \leq n$, finnes en unik $y \in A^n$ slik at $u(y) = e_i$. I så fall lar vi $\mu(e_i) = \phi \circ f(y)$. Denne er åpenbart veldefinert for $1 \leq i \leq n$. Om $n < i \leq n + m$ lar vi $\mu(e_i) = y$ slik at $g(y) = \theta \circ v(x)$ for en eller annen y. Dette går bra siden g er surjektiv. Dette er selvsagt også veldefinert (siden μ bare bestemmes av sine verdier på basiselementer). (det er også lett å sjekke at diagrammet er kommutativt)

Fra observasjonen over må μ være surjektiv, og fra Prop 2.3 i Atiyah, er dette ekvivalent med at M er endeliggenerert. $\square$

Oppgave (11)**.** *La A være en ring $\neq 0$. Vis at $A^m \simeq A^n \Rightarrow m = n$. Om $\phi : A^m \to A^n$ er surjective, så er $m \geq n$. Om $\phi : A^m \to A^n$ er injektiv, er alltid $m \leq n$?*

Proof. La m være maksimalidealet i A og la $\phi : A^m \to A^n$ være en isomorfi. Siden A/m er en kropp, er $(A/m) \otimes A^m$ et vektorrom (naturlig en A/m-modul) med dimensjon m. Det følger at $1 \otimes \phi : (A/m) \otimes A^m \to (A/m \otimes A^n$ er en isomorfi mellom vektorrom av dimensjoner m, n. Det følger at $m = n$. (fordi de har henholdsvis m, n basiselementer)
Om $\phi : A^m \to A^n$ er surjektiv, er $1 \otimes \phi$ som over en surjektiv (lett å sjekke!) lineæravbildning mellom vektorrom av dimensjoner m, n. Fra dimensjonsteoremet (f.eks MAT4000)

$$\dim \operatorname{Ker}(1 \otimes phi) + \dim \operatorname{Im}(\phi) = m$$

Men om ϕ er surjektiv, er så $\dim \operatorname{Ker}(1 \otimes phi) + n = m$, så $m \geq n$.
Samme argumentasjon som over gir at om $\phi : A^m \to A^n$ er injektiv, så er $m \leq n$. $\square$