Oppgaver i kommutativ algebra

Fredrik Meyer

1 Ringer og idealer

Oppgave (1)**.** *La x være et nilpotent element i ringen A. Vis at $1+x$ er en enhet i A, og utled at summen av en enhet og et nilpotent element er en enhet.*

Proof. La z være en enhet i A, og la x være nilpotent. Da er $x^n = 0$ for en $n > 0$. Da er

$$1 = (z+x)(z^{-1} - xz^{-2} + x^2z^{-3} - \ldots + x^{n-1}z^n) \tag{1}$$

så $z+x$ er en enhet i A. (dette er bare sumformelen for en geometrisk rekke)

At $1+x$ er en enhet følger trivielt ved $z = 1$.

□

Oppgave (2)**.** *La A være en ring og la $A[x]$ være polynomringen med koeffisienter i A. La $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in A[x]$. Bevis at*
i) f er en enhet i $A[x] \Leftrightarrow a_0$ er en enhet i A og $a_1, \ldots, a_n$ er nilpotente.
ii) f er nilpotent $\Leftrightarrow a_0, \ldots, a_n$ er nilpotente.
iii) f er en nulldivisor $\Leftrightarrow$ det eksisterer en $a \neq 0$ i A slik at $af = 0$.

Proof. i) Vi viser $\Leftarrow$ først. Ved Prop 1.7 i Atiyah er $a_1x+\ldots+a_nx^n$ nilpotent (siden nilradikalet er lukket under multiplikasjon fra ringen og er en abelsk gruppe). Fra oppgave (1) følger det at $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ er enhet.

Den andre implikasjonen $\Rightarrow$ er verre. Anta f er enhet i $A[x]$. Da finnes en invers $g = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ slik at

$$fg = c_0 + c_1x + \ldots + c_{m+n}x^{n+m} = 1 \tag{2}$$

med

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j} \tag{3}$$

Vi skal vise ved induksjon at

$$a_n^{r+1} b_{m-r} = 0 \tag{4}$$

for alle $r \in \{0, \ldots, m\}$. Tilfellet $r = 0$ stemmer åpenbart siden (4) da er koeffisienten foran x^{m+r} i fg. Anta nå at $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ for $r = 0, 1, \ldots, r$. Koeffisienten foran $x^{n+m-(r+1)}$ i fg er gitt ved (3). Åpenbart er $c_{n+m-(r+1)} = 0$ siden $fg = 1$.

$$c_{n+m-r-1} = a_n b_{m-r-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_{n+m-r-i-1} + \sum_{i=n+1}^{n+m-r-1} a_i b_{n+m-r-i-1} \tag{5}$$

Her er siste ledd 0 fordi alle $i > n$ (f er et polynom av grad n). Vi flytter over, og ganger med a_n^{r+1}, og får

$$a_n^{r+2} b_{m-r-1} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i a_n^{r+1} b_{n+m-r-i-1} \tag{6}$$

Ved induksjonshypotesen er $a_n^{r+1} b_k = 0$ for alle k lavere og lik $m - r$, men dette gjør at summen i (6) er lik 0. Vi konkluderer med at (4) gjelder for alle r, og da spesielt for $r = m$, slik at $a_n^{m+1} b_0 = 0$. Ved å betrakte c_0 ser vi at b_0 er enhet, så vi ganger med b_0^{-1}, og får at $a_n^{m+1} b_0 b_0^{-1} = a_n^{m+1} = 0$, så a_n er nilpotent.

Ved Oppgave (1) er også $f - a_n x^n$ enhet. Samme argument gir at alle a_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ er nilpotente.

ii) Vi gjør $\Leftarrow$ først. Siden mengden av nilpotente elementer utgjør et ideal (Prop 1.7 i Atiyah), er også $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ nilpotent.

$\Rightarrow$. Anta at f er nilpotent. Ved oppgave (1) er $1 + f$ enhet i $A[x]$. Ved *i)* er $a_1, \ldots, a_n$ nilpotente. Det følger at $a_0 = f - (a_1 x + \ldots + a_n x^n)$ er nilpotent (igjen, Prop 1.7 i Atiyah).

iii) Den lette implikasjonen $\Leftarrow$ først. Om $a \neq 0 \in A$ og $af = 0$. er f åpenbart en nulldivisor siden $a \in A[x]$.

$\Rightarrow$. Anta nå at f er en nulldivisor. Da eksisterer det en $g \in A[x]$ av minste grad m slik at $fg = 0$. Om $g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, følger det at $a_m b_m = 0$, så $a_n g$ er et polynom av grad $< m$. Og slik at $(a_n g) f = a_n (gf) = 0$. Men g var valgt som det polynomet av minste grad slik at $fg = 0$, så $a_n g = 0$.

Vi skal vise ved induksjon at

$$a_{n-r} g = 0 \text{ for alle } r \in \{0, \ldots, 0\} \tag{7}$$

Tilfellet $r = 0$ er allerede vist. Anta nå at (7) stemmer for $r = 1, \ldots, k$. Da har vi at:

$$\begin{aligned} & (a_0 + \ldots + a_n x^n)(b_0 + \ldots + b_m x^m) \\ = & (\sum_{i=0}^{n-k-1} a_i x^i + \sum_{i=n-k}^{n} a_i x_i)(\sum_{i=0}^{m} b_i x^m) \\ = & (\sum_{i=0}^{n-r-1} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{m} b_i x^m), \end{aligned}$$

hvor vi i siste steg har brukt induksjonshypotesen. Ved samme argument som over er $a_{n-r-1} g = 0$ og dermed er (7) vist. Det følger at $a_i b_j = 0$ for alle i, j og dermed at

$$\prod_{b_j \neq 0} b_j f = 0.$$

Og vi er ferdige. $\square$

Oppgave (4)**.** *I ringen $A[x]$ er Jacobson-radikalet lik nilradikalet.*

Proof. Betegn Jacobson-radikalet med $\mathfrak{J}$ og nilradikalet med $\mathfrak{N}$. Vi viser først at $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{J}$. La f være nilpotent. Da er også fg nilpotent for alle $g \in A[x]$. Ved oppgave (1) er $1 + fg$ enhet i $A[x]$ for alle $g \in A[x]$. Ved Prop 1.9 i Atiyah er da $f \in \mathfrak{J}$. Så $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{J}$.

La $f \in \mathfrak{J}$. Da er $1 - fg$ enhet for alle $g \in A[x]$. Spesielt er $1 + fx$ enhet, og ved oppgave (2i) følger det at $a_0, \ldots, a_n$ er nilpotente. Det følger trivielt fra oppgave (2ii) at f er nilpotent, så $f \in \mathfrak{N}$, altså $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{N}$.

Vi konkluderer med at $\mathfrak{J} = \mathfrak{N}$. $\square$

Oppgave (8)**.** *La $A \neq 0$ være en ring. Vis at mengden av primidealer har et minste element med hensyn på inklusjon.*

Proof. Vi bruker Zorns lemma "'baklengs"', dvs. aksiomene for en partiellordning er oppfylt også for ordning "'motsatt"' vei.

La Σ være mengden av primidealer av A. Da er Σ ikke-tom siden Theorem 1.3 i Atiyah garanterer et maksideal (som også er prim). La nå $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ være en kjede av primidealer slik at $\mathfrak{p}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}_\beta$ eller $\mathfrak{p}_\beta \subseteq \mathfrak{p}_\beta$ for alle indekser α, β.

La nå $\mathfrak{p} = \cap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$. Da er $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\gamma$ for en indeks γ, så $\mathfrak{p}$ er et primideal som er inneholdt i alle primidealene $\mathfrak{p}_\alpha$, og er derfor et minste element for kjeden.

Ved Zorns lemma har A derfor et minste primideal. $\square$

Oppgave (10)**.** *La A være en ring og $\mathfrak{R}$ ringens nilradikal. Da er følgende ekvivalent:*
i) A har nøyaktig ett primideal.
ii) hvert element i A er enten en enhet eller nilpotent.
iii) $A/\mathfrak{R}$ er en kropp.

Proof. $i) \Rightarrow ii)$. Siden A bare har ett primideal, er dette idealet også maksimalt (siden alle maksimale idealer også er primidealer og alle ringer har et maksimalt ideal, ved Theorem 1.3 i Atiyah). Alle elementer som ikke er enheter, er inneholdt i maksimalidealet ved Korollar 1.5 i Atiyah. Siden nilradikalet $\mathfrak{R}$ er snittet av alle primidealene, må alle elementene i $\mathfrak{R}$ være nilpotente.

$ii) \Rightarrow iii)$. La $\bar{x} \in A/\mathfrak{R}$ være ulik 0. og la $\phi : A \to A/\mathfrak{R}$ være standard-homomorfien. Siden $\bar{x} \neq 0$, er $x \notin \mathfrak{R}$, så x er en enhet i A med invers x^{-1}. Da er $\phi(xx^{-1}) = \bar{x}\bar{x}^{-1} = \bar{1}$, så $\bar{x}$ er enhet. Siden $\bar{x}$ var arbitrær, er $A/\mathfrak{R}$ en kropp.

$iii) \Rightarrow i)$. Siden $A/\mathfrak{R}$ er en kropp, er de eneste idealene i $A/\mathfrak{R}$ nullidealet og $A/\mathfrak{R}$ selv. Fra Prop 1.1 i Atiyah følger umiddelbart det at det eneste idealet som inneholder $\mathfrak{R}$ er A selv, så A må ha kun ett primideal (hadde A hatt flere, ville $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{p}$ for et primideal $\mathfrak{p}$). □

Oppgave (11)**.** *En ring A er Boole hvis $x^2 = x$ for alle $x \in A$. Hvis A er Boole, vis at*
i) $2x = 0$ for alle $x \in A$
ii) Hvert primideal er maksimalt, og $A/\mathfrak{p}$ er en kropp med to elementer. iii) Hvert endeliggenererte ideal er et hovedideal.

Proof. i) Se på $x+1$. Siden A er Boole, er $(x+1)^2 = x+1$, så $x^2+2x+1 = (x+1)+2x = x+1$, så $2x = 0$.

ii) La $\mathfrak{p}$ være et primideal. Da er $A/\mathfrak{p}$ et integritetsdomene. La $\bar{x} \in A/\mathfrak{p}$ være ulik 0. Siden $x^2 = x$, er $x(x-1) = x^2 - x = x - x = 0$, så $\bar{x}(\bar{x} - \bar{1}) = 0$ i $A/\mathfrak{p}$. Men da må $\bar{x} - 1 = 0$, altså $\bar{x} = 1$. Så $A/\mathfrak{p}$ har to elementer. Siden $\bar{x}\bar{x} = 1$ er $A/\mathfrak{p}$ en kropp, og $\mathfrak{p}$ er derfor maksimal. □