Oblig 1 - MAT2410

Fredrik Meyer

Oppgave (1a)**.** *Bestem Arg*$(-6-6i)$, *Arg*$(-\pi)$, *Arg*$(3i)$, *Arg*$(\sqrt{3}-i)$.

Proof. $\text{Arg}(-6-6i)$: Dette tallet peker 45 grader nedover på skrå i tredje kvadrant, så vinkelen må være $\text{Arg}(-6-6i) = 5 \cdot \frac{\pi}{4}$. $\text{Arg}(-\pi)$: Dette tallet peker mot venstre, og har ingen imaginærdel, så vinkelen vi må ha $\text{Arg}(-\pi) = -\pi$. $\text{Arg}(3i)$: Dette tallet peker "rett opp", så vi må ha $\text{Arg}(3i) = \frac{\pi}{2}$. $\text{Arg}(\sqrt{3}-i)$: Dette tallet danner en 30-60-90-trekant i det komplekse planet med hypotenusen under den reelle linjen, så $\text{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$. □

Oppgave (1b)**.** *Uttrykk de samme tallene på polarform og regn ut produktet av dem.*

Proof. Dette er rutine. For hvert av tallene regner vi ut modulusen ved hjelp av formelen $r = \sqrt{a^2+b^2}$ (som bare er Pythagoras). Argumentene har vi allerede regnet ut, så polarformene vil ha formen $re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} -6-6i = 6\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \qquad & -\pi = \pi e^{i\pi} \\ 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \quad & \sqrt{3}-i = 2e^{i\frac{13\pi}{6}} \end{aligned}$$

Igjen, utregning av produktet er rutine, ved bruk av vanlige eksponensial-regneregler. Utfordringen er å legge brøkene riktig sammen:

$$\prod_{i=1}^{4} z_i = 36\pi\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

□

Oppgave (1c)**.** *Beskriv mengden av punkter* z *slik at* $z\bar{z} = \frac{1}{2}(z+\bar{z})^2 + 1$.

Proof. La $z = a + ib$. Vi bruker at $z\bar{z} = |z|^2$, og at $z + \bar{z} = 2a$. Fra dette får vi at

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{1}{2}(z+\bar{z})^2 + 1 \\ a^2 + b^2 &= \frac{1}{2}(2a)^2 + 1 \\ a^2 + b^2 &= 2a^2 + 1 \\ b^2 - a^2 &= 1. \end{aligned}$$

Alle (a, b) slik at sistnevnte ligning er oppfylt utgjør en hyperbel (ser ut som to andregradslikninger som speiler seg i hverandre). □

Oppgave (1d)**.** *Skriv e^{e^i} på standardform.*

Proof. Vi vet at $e^i = \cos 1 + i \sin 1$. Det følger at $e^{e^1} = e^{\cos 1 + i \sin 1} = e^{\cos 1} e^{i \sin 1}$, som per definisjon er lik

$$e^{\cos 1}(\cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1)) = e^{\cos 1}\cos(\sin 1) + ie^{\cos 1}\sin(\sin 1).$$

□

Oppgave (2a)**.** *Vis at*

$$\sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Proof. La $S = \sum_{j=0}^{n} z^j$. Da er $Sz = \sum_{j=0}^{n} z^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} z^j$. Men

$$Sz - S = \sum_{j=1}^{n+1} z^j - \sum_{j=0}^{n} z^j = z^{n+1} - 1$$

ved kansellering (legg merke til at alle leddene i summene er like, bortsett fra det første i S og det siste i Sz). Dermed er

$$S = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Akkurat som vi skulle vise. □

Oppgave (2b)**.** *Vis at*

$$\sum_{j=0}^{n} \sin(j\theta) = \frac{\sin(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Proof. Ved forrige oppgave er $\sum_{j=0}^{n} e^{i\theta j} = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$. Vi er interessert i imaginærdelen til dette uttrykket. Vi bruker definisjonen av $e^{i\theta}$, og skriver (vi lar $\gamma = (n+1)\theta$):

$$\begin{aligned}\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} &= \frac{\cos\gamma + i\sin\gamma - 1}{\cos\theta - 1 + i\sin\theta} \quad (1)\\ &= \frac{(\cos\gamma - 1 + i\sin\gamma)(\cos\theta - 1 - i\sin\theta)}{2-2\cos\theta} \quad (2)\end{aligned}$$

Som nevnt er vi interessert i imaginærdelen til uttrykket over. Denne er:

$$\frac{\sin\theta(1-\cos\gamma) + \sin\gamma(\cos\theta - 1)}{2-2\cos\theta}$$

Dette kan forenkles litt vha sumformelen til sinus:

$$\cdots = \frac{\sin(n\theta) + \sin\theta + \sin((n+1)\theta}{2-2\cos\theta}$$

...Og her må jeg innrømme at jeg står fast! □

Oppgave (2c). *Vis at*

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(j\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\theta/2)}$$

Proof. Vi bruker samme idé som i forrige oppgave (bortsett fra at i dette tilfellet får jeg det til!). Vi er interessert i realdelen til uttrykket (2) over, og det er:

$$\frac{\cos\gamma\cos\theta - \cos\gamma + \sin\gamma\sin\theta(1-\cos\theta)}{2-2\cos\theta}$$

Vi griseregner og bruker forskjellige trigonometriske identiteter som jeg regner med det er unødvendig å bevise her:

$$\begin{aligned}\cdots &= \frac{1}{2} + \frac{\cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta - \cos\gamma}{2(1-\cos\theta)}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(\gamma-\theta) - \cos\gamma}{2(1-\cos\theta)}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(n\theta) - \cos((n+1)\theta)}{2(1-\cos\theta)}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{2\sin(\frac{\theta}{2})\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}\end{aligned}$$

Som var uttrykket vi ville fram til. $\square$

Oppgave (2d)**.** *Regn ut alle verdier av*

$$z = (1 - i)^{5/2}$$

, og plott disse i det komplekse planet.

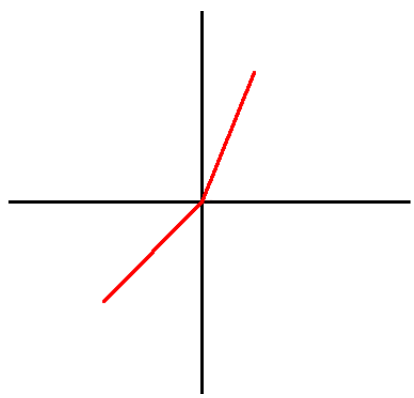
Proof. Vi ser at $z^2 = (1 - i)^5 = (2e^{-i\frac{\pi}{4}})^5 = 32e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 32e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Enhver andregradsligning har to røtter, og disse er gitt ved

$$(re^{i\theta})^{1/2} = r^{1/2}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{2}}$$

hvor $k = 0, 1$. I dette tilfellet får vi at

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}4e^{i\frac{3\pi}{8}} \\ z_2 &= \sqrt{2}4e^{i\frac{11\pi}{8}} \end{aligned}$$

Figuren viser tallene z_1, z_2. Vi ser lett at om vi dobler vinklene i hvert av



tallene, ender vi opp på samme vinkel som z^2. $\square$

Oppgave (3a)**.** *La Riemann-sfæren være*

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Se på delmengden

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma | x_3 = \frac{1}{2}\}$$

Beskriv mengden i $\mathbb{C}$ som svarer ved stereografisk projeksjon til S.

Proof. Siden sirkler går til sirkler under stereografisk projeksjon, og delmengden S er en sirkel på toppen av Riemann-sfæren, skjønner vi at bildet i $\mathbb{C}$ er en sirkel. Så det holder å finne ett punkt i $\mathbb{C}$ som ligger på denne sirkelen. Velger vi $y = 0$, får vi at vi må ha $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, og ved formelen på siden 47 i læreboken, får vi at $z \in \mathbb{C}$ (som svarer til stereografisk projeksjon av punktet $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$ er:

$$z = \frac{x_1}{1 - z_3} = \sqrt{3}$$

Så delmengden S projiseres på sirkelen med radius $\sqrt{3}$ i $\mathbb{C}$. $\square$

Oppgave (3b)**.** *La $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < 1$. Vis at*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1}{1 - z}$$

Proof. Dette følger trivielt fra oppgave 2a. Siden $|z| < 1$ vil $z^n \to 0$ når $n \to \infty$, så

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} z^j = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

Og vi er ferdige. $\square$