Oblig 2 - MAT2400

Fredrik Meyer

Oppgave 1

La K være en lukket og begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$. La $f : K \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Vis at mengden $L = \{(x, f(x)|x \in K\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ er lukket og begrenset.

Bevis. Vi må vise at enhver konvergent følge i L, "ender opp i L". Altså at hvis (x_n) er en konvergent følge som konvergerer til x_0, så er $x_0 \in L$. Anta altså at $x_n \in L$ og at $x_n \to x_0$. Da er hver x_n på formen $x_n = (y_n, f(y_n))$, hvor $y_n \in K$, så alle følger $y_n \in K$ svarer til en følge i L og motsatt (per definisjon av L). Siden x_n konvergerer, må også y_n konvergere til y_0, og siden K er lukket og begrenset, er $y_0 \in K$. Siden f er kontinuerlig har vi at $f(y_n) \to f(y_0)$ når $n \to \infty$. Dermed $x_n = (y_n, f(y_n)) \to (y_0, f(y_0)) \in L$ når $n \to \infty$ (siden $y_0 \in K$). $\square$

Oppgave 2

La $a_j \in \mathbb{R}^n$ og $\lambda_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$. Sett $A_N = \sum_{j=0}^{N} a_j$

a)

Vis at

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j a_j = \lambda_{N+1} A_N + \sum_{j=0}^{N} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j$$

Bevis. Legg først merke til at $A_{N+1} - A_N = a_{n+1}$. Resten er ren algebra:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{N+1}A_N + \sum_{j=0}^{N}(\lambda_j - \lambda_{j+1})A_j &= \sum_{j=0}^{N}\lambda_j A_j - \sum_{j=0}^{N-1}\lambda_{j+1}A_j \\
&= \lambda_0 A_0 + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j A_j - \sum_{j=1}^{N}\lambda_j A_{j-1} \\
&= \lambda_0 a_0 + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j (A_j - A_{j-1}) \\
&= \lambda_0 a_0 + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_j \\
&= \sum_{j=0}^{N}\lambda_j a_j
\end{aligned}
$$

□

b)

Anta det eksisterer en K slik at $||A_N|| < K$ for alle N. Anta også at λ_j er en synkende følge slik at $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = 0$. Bevis at $\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a_j$ da konvergerer, og at

$$
\left|\left|\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a_j\right|\right| \leq K\lambda_0
$$

Bevis. Fra forrige oppgave har vi at $\sum_{j=N}^{M}\lambda_j a_j = \sum_{j=0}^{M}\lambda_j a_j - \sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j a_j = \lambda_{M+1}A_M + \sum_{j=N}^{M}(\lambda_j - \lambda_{j+1})A_j - \lambda_N A_{N-1}$. Dermed er $\sum_{j=N}^{M}\lambda_j a_j \leq \lambda_{M+1}K + K\sum_{j=N}^{M}(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + K\lambda_N = 2K\lambda_N$ for en eller annen K. Siden $\lambda_j \to 0$, eksisterer det for alle $\epsilon > 0$ en $N(\epsilon)$ slik at $\lambda_n < \frac{\epsilon}{2K}$ når $n > N(\frac{\epsilon}{2K}) = N_0$. Dermed er $2K\lambda_N < \epsilon$ når $n > N_0$. Fra ulikheten vår er da $\sum_{j=0}^{N}\lambda_j a_j$ en Cauchy-følge, og det følger at den konvergerer.

Siden λ_n er synkende og konvergerer mot 0, må alle λ_n være positive.

Ulikheten i oppgaven vises lett:

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{j=0}^{N}\lambda_j a_j\right|\right| &= \left|\left|\lambda_{N+1}A_N + \sum_{j=0}^{N}(\lambda_j - \lambda_{j+1})A_j\right|\right| \\ &\leq \lambda_{N+1}\,||A_N|| + \sum_{j=0}^{N}(\lambda_j - \lambda_{j+1})\,||A_j|| \\ &\leq \lambda_{N+1}K + K\sum_{j=0}^{N}(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \\ &= \lambda_{N+1}K + K(\lambda_0 - \lambda_{N+1}) \\ &\to 0 + K(\lambda_0 + 0) = K\lambda_0\end{aligned}$$

når $N \to \infty$. □

c)

La a_j være en følge av reelle tall. Anta at $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerer. Bevis at $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konvergerer for $x \in [0,1)$.

Bevis. Vi bruker notasjon fra forrige oppgave. La $A_N = \sum_{j=0}^{N} a_j$. Siden A_N konvergerer, eksisterer det spesielt en K slik at $||A_N|| \leq K$ for alle N. Så observerer vi at $\lambda_j = x^j$ er en synkende følge som konvergerer mot 0 for $x \in [0,1)$. Det er lett å se at λ_j er synkende: $\lambda_{j+1} - \lambda_j = x^{j+1} - x^j = x^j(x-1) < 0$. Så λ_j er synkende. At $\lambda_j \to 0$ er åpenlyst. Dermed er hypotesene i forrige oppgave oppfylt, og det følger at $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ konvergerer for alle $x \in [0,1)$ (og spesielt for $x = 1$ siden $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerer). □

d)

La a_j være som over. La $\epsilon > 0$. Vis at det eksisterer en $N(\epsilon)$ slik at

$$|\sum_{j=M}^{\infty} a_j x^j| \leq \epsilon$$

når $M > N(\epsilon)$ og $x \in [0,1]$.

Bevis. Legg først merke til at $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ også konvergerer når $x = 1$. Anta først $x \neq 1$. Fra beviset til b) har vi at $\sum_{j=N}^{M} a_j x^j \leq 2Kx^N$. Siden $x^j \to 0$, velger vi N stor nok til at

$$\sum_{j=N}^{M} a_j x^j \leq 2Kx^N < \epsilon$$

Lar vi $M \to \infty$ har vi dermed at $\sum_{j=N}^{\infty} a_j x^j < \epsilon$ som ønsket.

Om $x = 1$ følger resultatet lett siden A_N er en Cauchy-følge (enhver konvergent følge er en Cauchy-følge). $\square$

e)

La a_j være som i c), og la $x \in [0,1]$. La $s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$. Vis at s(x) er kontinuerlig på $x = 1$.

Bevis. La $x = 1$ og $y \in [0,1]$. Anta $\epsilon > 0$. Da har vi fra d) at det eksisterer M slik at $\sum_{j=M}^{\infty} a_j x^j \leq \frac{\epsilon}{4}$. Siden $\sum_{j=0}^{M-1} a_j x^j$ er en kontinuerlig funksjon, eksisterer det en $\delta > 0$ slik at $|\sum_{j=0}^{M-1} a_j y^j - \sum_{j=0}^{M-1} a_j x^j| < \frac{\epsilon}{2}$ når $|x-y| < \delta$.

Anta så $|x - y| < \delta$. Da har vi

$$\begin{aligned}
|s(x)-s(y)| = |\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j| &= |\sum_{j=0}^{M-1} a_j x^j - \sum_{j=0}^{M-1} a_j y^j + \sum_{j=M}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=M}^{\infty} a_j y^j| \\
&\leq |\sum_{j=0}^{M-1} a_j x^j - \sum_{j=0}^{M-1} a_j y^j| + |\sum_{j=M}^{\infty} a_j x^j| + |\sum_{j=M}^{\infty} a_j y^j| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon
\end{aligned}$$

Så s(x) er kontinuerlig i x=1. $\square$

Oppgave 3

a)

La

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{for } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Vis at f er deriverbar i (0,0) med derivert lik nullmatrisen.

Bevis. Det er nok å vise at de retningsderiverte i både x- og y-retning er lik 0 i (0,0). Fra en oppgave i boken er den retningsderiverte definert som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin(\frac{1}{|t|})}{t}$$

Denne grensen regner vi lett ut ved skviselemmaet i forkledning. Siden $|\sin(t)| \leq 1$, har vi at $|t \sin(\frac{1}{|t|})| \leq t \to 0$ når $t \to 0$. Det følger at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

På grunn av symmetri er utregningen av den retningsderiverte i y-retning helt tilsvarende. □

b)

Vis at $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ ikke er kontinuerlige i (0,0).

Bevis. På samme måte som i forrige bevis holder det å vise påstanden kun for $\frac{\partial f}{\partial x}$ på grunn av symmetri. Anta at $x \neq 0$. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,0) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x^2(\sin(\frac{1}{|x+t|}) - \sin(\frac{1}{|x|})) + 2xt\sin(\frac{1}{|x+t|}) + t^2 \sin(\frac{1}{|x+t|})}{t}$$

$$= x^2 \frac{d}{dx}(\sin(\frac{1}{|x|})) + 2x\sin(\frac{1}{|x|}) + 0$$

Å regne ut $\frac{d}{dx}\sin(\frac{1}{|x|})$ gjøres raskt ved kjerneregelen. Svaret avhenger om x er større eller mindre enn 0:

$$\frac{d}{dx}\sin(\frac{1}{|x|})(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x}) & \text{om } x > 0 \\ \frac{1}{x^2}\cos(-\frac{1}{x}) & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Anta for enkelhetsskyld at $x > 0$ (uten tap av generalitet). Vi har da at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to 0} -\cos(\frac{1}{x}) + 2x\sin(\frac{1}{x}) \nrightarrow 0$$

når $x \to 0$. Dermed kan ikke $\frac{\partial f}{\partial x}$ være kontinuerlig i (0,0). □

Oppgave 4

La f og g være funksjoner på $[a,b]$, f en økende funksjon og g kontinuerlig med $g(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$.

a)

Vis at det eksisterer $c \in [a, b]$ slik at

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$$

Bevis. Integralet av integrerbar funksjon er kontinuerlig: Anta altså at $G(t) = \int_u^t g(x)dx$. Da er $\lim_{h\to 0} G(t+h) = G(t)$, så G er kontinuerlig (bruk f.eks lengde x sup - ulikheten). Definer

$$F(x) = f(a)\int_a^x g(t)dt + f(b)\int_x^b g(t)dt$$

Legg merke til at $F(b) = f(a)\int_a^b g(t)dt$ og at $F(a) = f(b)\int_a^b g(t)dt$. Vi har at $\int_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(a)g(x)dx = \int_a^b g(x)(f(x) - f(a))dx \geq 0$ siden f er økende og g er positiv. Dermed er $\int_a^b f(x)g(x) \geq f(a)\int_a^b g(x)dx = F(b)$. På samme måte vises at $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq F(a)$. Så $F(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq F(a)$.

Ved middelverdisetningen eksisterer det da en c slik at $F(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ (siden F er kontinuerlig). Men dette er akkurat det vi skulle vise. □

b)

Anta $f(x) > 0$ for $x \in [a, b]$. Vis at det eksisterer et punkt $d \in [a, b]$ slik at

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_d^b g(x)dx$$

Bevis. Definer (den kontinuerlige) funksjonen $G(x) = f(b)\int_x^b g(x)dx$. Legg merke til $G(b) = 0$ og at $G(a) = f(b)\int_a^b g(x)dx$. Siden $f(x) > 0$ og $g(x) \geq 0$, er det klart at $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq G(b)$. Samtidig har vi at $\int_a^b f(x)g(x) - f(b)g(x)dx = \int_a^b g(x)(f(x) - f(b))dx \leq 0$ siden f er stigende. Dermed er $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(b)\int_a^b g(x)dx = G(a)$. Så

$$G(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq G(a)$$

og ved middelverdisetningen eksisterer en $d \in [a, b]$ slik at $G(d) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Men dette var akkurat det vi ønsket å vise. □