Oblig 1 - MAT2400

Fredrik Meyer

1 Oppgave 1

Vi lar $\alpha > 1$ og $x_1 > \sqrt{\alpha}$. Vi definerer en følge (x_n) ved

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}$$

Lemma 1 (a). $x_n > 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$

Bevis. Siden $\alpha > 1$ er $\alpha + x_n > 1 + x_n$, så $1 = \frac{1+x_n}{1+x_n} > \frac{\alpha+x_n}{1+x_n} = x_{n+1}$. Dette er definisjonen på x_n, så konklusjonen følger. □

Lemma 2 (b). *$x_n > \sqrt{\alpha}$ for odde n, og $x_n < \sqrt{\alpha}$ for like n. Videre er også $x_{2n+1} > x_{2n} \, \forall n$.*

Bevis. Først litt algebra:

$$\begin{aligned}
\alpha - x_{n+1}^2 &= \alpha - \frac{(\alpha + x_n)^2}{(1 + x_n)^2} \\
&= \frac{\alpha(1 + x_n)^2 - (\alpha + x_n)^2}{(1 + x_n)^2} \\
&= \frac{\alpha(1 + 2x_n + x_n^2) - (\alpha^2 + 2\alpha x_n + x_n^2)}{(1 + x_n)^2} \\
&= \frac{\alpha + 2x_n\alpha + \alpha x_n^2 - \alpha^2 - 2\alpha x_n - x_n^2}{(1 + x_n)^2} \\
&= \frac{\alpha - \alpha^2 + x_n^2(\alpha - 1)}{(1 + x_n)^2} \\
&= \frac{\alpha(1 - \alpha) - x_n^2(1 - \alpha)}{(1 - x_n)^2} \\
&= \frac{(1 - \alpha)(\alpha - x_n^2)}{(1 + x_n)^2}
\end{aligned}$$

Siden $\alpha > 1$ og $x_1^2 > \alpha$, er $(1-\alpha)(\alpha - x_1^2) > 0$, så fra regnestykket vårt ovenfor er $\sqrt{\alpha} > x_2$. Nå gir samme argument at $(1-\alpha)(\alpha - x_2^2) < 0$, så $x_3 > \sqrt{\alpha}$. Anta nå at dette stemmer for $n = k$. Altså at

$$x_{2k+1} > \sqrt{\alpha}$$

Da er $\alpha - x_{2k+2} = \frac{(1-\alpha)(\alpha - x_{2k+1}^2)}{(1+x_n)^2} > 0$, så $x_{2k+2}^2 < \alpha$. Resultatet følger ved induksjonsprinsippet.

Vi har nå at $x_{2n+1} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1+x_n} > x_n$, siden $\alpha - x_n^2 < 0$, så $x_{2n+1} > x_{2n}$, som beviser den siste påstanden. □

Lemma 3 (c)**.** *Videre er $x_1 > x_3 > x_5 > \ldots$ og $x_2 < x_4 < x_6 < \ldots$.*

Bevis. Siden $x_n = \frac{\alpha + x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, er $x_{n-1} = \frac{x_n - \alpha}{1-x_n}$. Dette er elementær algebra.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_{n-1} &= \frac{\alpha + x_n}{1+x_n} - \frac{x_n - \alpha}{1 - x_n} \\ &= \frac{(\alpha + x_n)(1-x_n) - (x_n - \alpha)(1+x_n)}{(1+x_n)(1-x_n)} \\ &= 2\frac{\alpha - x_n^2}{1 - x_n^2} \end{aligned}$$

Anta for eksempel at $n-1$ er partall. Da er også $n+1$ partall. Dermed er $\alpha - x_n^2 > 0$ fra forrige lemma. Fra utregningen ovenfor følger det at $x_{n+1} > x_{n-1}$ når n er partall. Vises på tilsvarende måte for oddetall. □

Lemma 4 (d)**.** *$(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ og $(x_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ er konvergente delfølger.*

Bevis. Fra lemma b) vet vi at $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ er oppad begrenset av $\sqrt{\alpha}$. I tillegg er $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ strengt økende. Fra analysens fundamentalaksiom konvergerer derfor følgen. Akkurat samme argumentasjon for $(x_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$. □

Teorem 1. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$

Bevis. Siden $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ og $(x_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ konvergerer, har vi at $x_{n+1} - x_{n-1} \to 0$ når $n \to \infty$. Men $x_{n+1} - x_{n-1} = 2\frac{x_n^2 - \alpha}{x_n^2 - 1}$, så vi må ha at $x_n^2 - \alpha \to 0$ når $n \to \infty$. Men dette er det samme som at $x_n \to \sqrt{\alpha}$ når $n \to \infty$. □

2 Oppgave 2

Lemma 5 (a). *La $f : I \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig og deriverbar, der $I \subset \mathbb{R}$ er et åpent intervall. Anta $\exists K$ slik at $|f'(x)| < K \, \forall x \in I$. Da er f uniformt kontinuerlig.*

Bevis. Vi må vise at gitt enhver $\epsilon > 0$, eksisterer det en $\delta(\epsilon) > 0$ slik at når $|x - y| < \delta(\epsilon)$, så er $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Siden f' er begrenset av K, f er kontinuerlig og deriverbar, har vi fra middelverdiulikheten at $f(b) - f(a) \leq (b - a)K \, \forall a, b \in I \; (b > a)$. Setter vi $\delta = \frac{\epsilon}{K}$, så ser vi at $|x - y| < \delta$ medfører at $|f(x) - f(y) \leq K|x - y| < \epsilon$, og vi er ferdige. □

Lemma 6 (b). *La $g : I \to \mathbb{R}$ være uniformt kontinuerlig og deriverbar. Da er g' begrenset.*

Bevis. Anta g' er ubegrenset i t. Da har vi at

$$\frac{g(t_n) - g(t)}{t_n - t} \to \infty$$

når $t_n \to t$. Men dette betyr at for alle $\epsilon > 0$ og alle $n > N(\epsilon)$ er $|g(t_n) - g(t)| > |t_n - t|$ selv om $|t_n - t| < \epsilon$. Dermed kan ikke g være uniformt kontinuerlig, og vi har en selvmotsigelse. □

Lemma 7 (c). *La $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være uniformt kontinuerlig med $h(1) = 1$. Da eksisterer det en K slik at $|h(x)| < Kx \, \forall \, x \in [1, \infty)$.*

Bevis. Siden h er uniformt kontinuerlig, eksisterer det en N slik at $|x - y| < \frac{1}{N}$ medførerer at $|h(x) - h(y)| < \epsilon$. La $x \in [1, \infty)$. Da er

$$\begin{aligned}
|h(x)| &= |h(x) - h(x - \frac{1}{N}) + h(x - \frac{1}{N}) - h(x - \frac{2}{N}) - \ldots + h(1)| \\
&\leq |h(x) - h(x - \frac{1}{N})| + |h(x - \frac{1}{N}) - h(x - \frac{2}{N})| + \ldots + |h(1)| \\
&< \epsilon N(x - 1) + 1 = \epsilon Nx - \epsilon \cdot 1 + 1 \\
&\leq \epsilon Nx - \epsilon x + x = (\epsilon N - \epsilon + 1)x
\end{aligned}$$

Hvor vi i siste steg har brukt at om $x \in [1, \infty)$, så er $x \geq 1$. Velger vi $K = (\epsilon N - \epsilon + 1)$, er vi ferdige. □

3 Oppgave 3

Lemma 8 (a)**.** *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Anta f er diskontinuerlige i $x_0 \in \mathbb{R}$. Da eksisterer det en følge x_n slik at $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$, men $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$.*

Bevis. Dette er enkelt. Siden f er diskontinuerlig i x_0, eksisterer det en $\epsilon > 0$ slik at uansett hva $\delta > 0$ er, så har vi at $|f(x_0) - f(x)| > \epsilon$, men $|x_0 - x| < \delta$. La nå (x_n) være en følge slik at $x_n \to x_0$. Da eksisterer det en $N(\delta)$ slik at $|x_0 - x_n| < \delta \, \forall \, n > N(\delta)$. Men siden f er diskontinuerlig i x_0, betyr dette at $|f(x_0) - f(x_n)| > \epsilon \, \forall \, n > N(\delta)$. Dermed har vi at $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$. $\square$

Lemma 9 (b)**.** *Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er diskontinuerlig i x_0. Da eksisterer det en følge (x_n) slik at $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$ og $r \in \mathbb{Q}$ slik at enten 1) $f(x_n) > r > f(x_0) \, \forall n$ eller 2) $f(x_n) < r < f(x_0) \, \forall n$.*

Bevis. La $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) < f(x_0)\}$ og $B = \{x \in \mathbb{R} | f(x) > f(x_0)\}$. Da har vi at $A \cup B \cup \{x_0\} = \mathbb{R}$. Dermed må minst én av A, B være slik at uansett hvilken ϵ vi blir gitt, så kan vi i denne finne x_n slik at $|x_n - x_0| < \epsilon \, \forall n > N(\epsilon)$ (hvis ikke, ville ikke disse mengdene partisjonert $\mathbb{R}$). Uten tap av generalitet, kan vi anta at denne mengden er A. La (x_n) være en følge i A slik at $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$. Siden f er diskontinuerlig i x_0, eksisterer det en ϵ slik at $|f(x_0) - f(x_n)| > \epsilon$, men $|x_0 - x_n| < \delta$. Dermed har vi at $f(x_0) - f(x_n) > \epsilon$ for alle x_n slik at $|x_n - x_0| < \delta$. Fra lemma 1.26 i boken, eksisterer det mellom to tall x og y alltid et rasjonalt tall slik at $x < r < y$. La r være et slikt tall mellom $f(x_0)$ og $f(x_0) - \epsilon$. $\square$

Teorem 2. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Anta at f oppfyller skjæringsegenskapen og at for hvert rasjonalt tall r, så er mengden $\{x | f(x) = r\}$ en lukket delmengde av $\mathbb{R}$. I så fall er f kontinuerlig.*

Bevis. Fra b) vet vi at det eksisterer en følge (x_n) og et rasjonalt tall r slik at (for eksempel) $f(x_n) > r > f(x_0)$ for alle n. Siden f oppfyller skjæringsegenskapen, eksisterer det for hver n t_n slik at $f(t_n) = r$. Så legger vi merke til at $t_n \in \{x | f(x) = r\} \, \forall n$, og at siden $x_n < t_n < x_0$ og $x_n \to x_0$, så må $t_n \to x_0$. Men siden $\{x | f(x) = r\}$ er lukket, må $x_0 \in \{x | f(x) = r\}$. Det betyr at $f(x_0) = r$, som er en selvmotsigelse siden vi antok at $r < f(x_0)$. f må derfor være kontinuerlig. $\square$

4 Oppgave 4

La $A \subset \mathbb{R}$ være en begrenset mengde. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$være kontinuerlig og avtagende, og la $B = \{f(x) : x \in A\}$. Da er B begrenset og $\sup B = f(\inf A)$

og $\inf B = f(\sup A)$.

Bevis. Dette er en slik påstand som er så selvsagt at den ikke burde bevises. Men la gå. Anta B var ubegrenset. La (x_n) være en følge i A slik at $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$. Siden B er ubegrenset kan vi ha valgt (x_n) slik at $|f(x_n) - f(x_m)| > M$ for alle $n > m$ og $M \in \mathbb{N}$. Men da har vi funnet M slik at $|f(x_n) - f(x_m)| > M$, men $|x_n - x_m| < \epsilon$ (bare la n,m være store nok). Men dette motsier at f er kontinuerlig. Dermed må B være begrenset.

La nå $= f(\inf A)$. Siden $\inf A \leq x \forall x$, så er $f(\inf A) \geq f(x) \forall x \in A$ siden f er synkende. Og siden hvis $\delta \leq x \forall x \in A$, er også $\delta \leq \inf A$, så følger det at $f(\delta) \geq f(x) \forall x \in A$, så er $f(\delta) \geq f(\inf A)$. Men dette er akkurat hva definisjonen av supremum er, og dermed må $\sup B = f(\inf A)$.

Den andre påstanden vises på akkurat samme måte. $\square$