Oblig 2 - MAT 2300

Fredrik Meyer

15. oktober 2009

I begge oppgavene har vi at $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Oppgave 1

Vi lar $r \in \mathbb{R}^+$, og L_r være linjen fra -r til r $\in \mathbb{C}$. Vi lar også $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = r, \text{ Im } z \geq 0\}$

a)

Vi skal regne ut $I = \int_{L_r} f(z)dz$. Dette er gitt ved $I = \int_a^b f(r(t))r'(t)dt$ der r(t) er en parametrisering av kurven. I dette tilfellet er "kurven" kun det reelle intervallet $[-r, r]$. En parametrisering er gitt ved $r(t) = t$ der $t \in [-r, r]$. Med andre ord: $I = \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1dt = \arctan r - \arctan(-r) = 2 \arctan r$.

b)

f har poler for $z = \pm i$. I denne oppgaven er $r < 1$, så f er analytisk innenfor $L_r + \gamma_r$, som er en lukket kurve. Vi har derfor at $\oint_{L_r+\gamma_r} f(z)dz = 0$ ved Cauchys integralteorem. Men vi har også at $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$ for vilkårlige kurver. Det følger at

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = -\int_{L_r} f(z)dz = -2\arctan(r)$$

c)

Vi skal regne ut $\int_{\gamma_r} f(z)dz$ når $r > 1$. La oss først regne ut $\int_{\gamma_r + L_r} f dz$ som er et integral over en lukket kurve. Vi kan da tillate oss å titte på Cauchys integralformel. Skriver vi $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$, og velger $g(z) = \frac{1}{z+i}$, så er g analytisk innenfor den lukkede kurven $\gamma_r + L_r$. Vi har altså at

$$\int_{\gamma_r+L_r} \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{\gamma_r+L_r} \frac{g(z)}{z-i}dz$$

Dette er en funksjon på formen vi finner i Cauchys integralformel, og det følger ved den at

$$\int_{\gamma_r+L_r} \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{\gamma_r+L_r} \frac{g(z)}{z-i}dz = g(i)2\pi i = \frac{1}{2i}2\pi i = \pi$$

Av samme grunn som i b) finner vi at

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \pi - \int_{L_r} f(z)dz = \pi - 2\arctan r$$

Oppgave 2

a)

Vi skal vise at $f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+iz} + \frac{1}{1-iz}\right]$. Nå kunne vi vært flinke og delbrøkoppspaltet f(z) - men vi kan jo gjøre ting enkelt: vi trekker sammen og ser hva vi ender opp med:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+iz} + \frac{1}{1-iz}\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{1-iz}{(1+iz)(1-iz)} + \frac{1+iz}{(1+iz)(1-iz)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1+1+iz-iz}{(1-iz)(1+iz)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1^2-(iz)^2}\right] \\
&= \frac{1}{1+z^2}
\end{aligned}$$

Som var akkurat det vi skulle vise.

b)

Vi skal finne Taylor-serien til f rundt z=0. Vi vet at Taylor-serien til funksjonen $\frac{1}{1-u} = \sum_{j=0}^{\infty} u^j$. Setter vi $u = -z^2$ får vi at $\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-(z^2)} = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-z^2)j = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^{2j} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 + ...$

Og vi er ferdige.